

АВИЛТАЙ НАУРЫЗБАЙ
Импульстік әсері бар сингулярлы ауытқыған
дифференциалдық теңдеулер

8D05401 — Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD)
дәрежесін алуға ұсынылған диссертацияның
АННОТАЦИЯСЫ

Математика табиғи процестердің математикалық моделін зерттейді. Кез келген математикалық модель белгілі деңгейде жуық болып табылады. Математикалық модель құру кезінде қарастырылып отырған процестің барынша маңызды, басым ерекшеліктерін қамтуға тырысады. Екінші жағынан, аналитикалық немесе сандық есептеулер процесс туралы қажетті ақпарат беру үшін модель жеткілікті деңгейде “қарапайым” болуы керек.

Зерттеудің өзектілігі. Сингулярлы ауытқыған теңдеулерге қызығушылық, олардың диффузия, химиялық кинетика, математикалық биология, физика, гидродинамика, техника және басқа да көптеген қолданбалы есептердің математикалық модельдері болып табылатындығымен түсіндіріледі. Ал енді нақты өмірдегі мысалдарды келтірсек, сингулярлық толқын кенеттен күш қолданылған жағдайда пайда болады, осыған мысал, жер сілкінісі апатты цунами толқынын әкелуі мүмкін, температураның кенеттен өзгерісі кеуекті материал үшін жылу цунамиін әкелуі мүмкін, ал сингулярлы сызықты емес осциллятор өте қызық түрде өзгереді. Қазіргі уақытта сингулярлық толқындық қозғалыстар математикадағы өзекті тақырыпқа айналууда, әсіресе квази-периодты бифуркациялар, сингулярлық диссипациялар және т.б. Келесі авторлардың жұмыстарында Л. Шлезингер, Г.Д. Биркгоф, П. Ноайон, В. Васов, А.Х. Найфе, А.Н. Тихонов, М. И. Вишик, Л.А. Люстерник, Н.Н. Боголюбов, У.А. Митропольский, А. Б. Васильева және В.Ф. Бутузов, Р.Э. О' Мэлли, Д. Р. Смит, В. Экхаус, К.В. Чанг және Ф. А. Хоуз, Дж. Кеворкиан және Дж.Д. Коул, Сандерс Және Ф. Верхулст, Э. Ф. Мищенко, Н. Розов, С.А. Ломов, М.И. Иманалиев, К.А. Қасымов осы типтегі теңдеулер теориясы құрылды және дамыды.

Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің келесі моделін қарастырайық,

$$\varepsilon z' = f(z, y, t),$$

$$y' = g(z, y, t),$$

мұндағы ε — кіші оң параметр. Әдебиеттерде осы жүйеге негізделген нәтижелер Тихонов типті теоремалар деп аталады. Сингулярлы ауытқыған есептердің шешімдерін жуықтаудың әртүрлі асимптотикалық әдістері бар. Ол әдістер кез келген дәлдікте бірқалыпты жуықтауды құруға мүмкіндік береді. Жүргізілген зерттеулер нәтижесінде шекаралық функциялар әдісі құрылды. Бұл әдіс шекаралық қабатты түзету әдісі ретінде де белгілі. Егер қарастырылып отырған аймақта, Тихонов теоремасының шарттары орындалса, онда сингулярлы ауытқыған есептерді шешу үшін шекаралық

функциялар әдісін қолдануға болады. Диссертациялық жұмыста негізгі нәтижені алу үшін шекаралық функциялар әдісі қолданылады.

Байнов пен Ковачев алғаш рет Тихонов теоремасының импульстік аналогын келесі түрде кеңейтті

$$\varepsilon z' = f(z, y, t), \quad \Delta z|_{t=t_i} = I_i(y(t_i)), \quad (1a)$$

$$y' = g(z, y, t), \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(y(t_i)), \quad (1b)$$

мұндағы $i = 1, 2, \dots, p$ және $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$. Жалпы импульстік жүйе дифференциалдық теңдеулерден (1a) және импульстік теңдеулерден (1b) тұрады. Осыған дейінгі мақалалар және кітаптарда кіші параметр тек дифференциалдық теңдеулерде болатын, бірақ импульстік бөлігіне қатыспайтын жүйелер қарастырылды. Яғни бұл жүйелердің дифференциалдық бөлігі ғана сингулярлы ауытқыған.

Ахмет және Чаг әдебиеттерде алғаш рет дифференциалдық теңдеуден бөлек, импульсті бөлігіде сингулярлы болатын келесі жүйені қарастырды:

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= f(z, y, t), & y' &= g(z, y, t), \\ \varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= I(z, y, \varepsilon), & \Delta y|_{t=\eta_j} &= J(z, y), \end{aligned} \quad (2)$$

мұндағы ε – оң кіші параметр, z, f және $I - m$ өлшемді функциялар, y, g және $J - n$ өлшемді функциялар, z^0 және y^0 – ε -нен тәуелсіз болсын, $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T - (0, T)$ интервалындағы үзіліс моменттері. Сонымен қатар, импульстік функцияның кіші параметр нөлге ұмтылғанда импульсті функцияның шексіздікке кетуін болдырмайтын келесі шарттар қойылады:

$$\lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, y, 0)} \frac{I(z, y, \varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \text{ және } \lim_{(z, y, \varepsilon) \rightarrow (\varphi, y, 0)} \frac{I(z, y, \varepsilon)}{\varepsilon} = I_0 \neq 0, \quad (*)$$

Осы шартқа байланысты екі жағдай көрсетіледі: бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық.

Диссертациялық жұмыста дифференциалдық теңдеуі ғана сингулярлы емес, сонымен қатар импульстік теңдеуде сингулярлы ауытқыған жүйелер қарастырылады. Осы жұмыстың мақсаты сингулярлы ауытқыған импульстік жүйе шешімінің кез келген дәлдікте толық асимптотикалық қатар құру болып табылады. Әрі қарай, "біз асимптотикалық қатарды құрамыз" деген сөздің орнына "біз асимптотиканы құрамыз" деген сөз тіркесі қолданылады. Бұл асимптотикалық қатардың кез келген натурал n – ші мүшелесіне дейін табуға мүмкіндік беретін алгоритмді білдіреді. Ол үшін шекаралық функциялар әдісін қолданылып, $0 \leq t \leq T$ кесіндісінде бірқалыпты болатын шешімінің асимптотикалық жуықтауы құрылады.

Зерттеу мақсаты. Диссертациялық жұмыстың мақсаты сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуін құру. Қарастырылып отырған есептің ерекшеліктерін анықтау.

Зерттеу нысаны. Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп есеп.

Зерттеу әдістері. Диссертациялық жұмыста келесі заманауи әдістердің тиімді комбинациялары қолданылды:

-Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулерді интегралдаудың асимптотикалық әдістері;

-Сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы;

-Шекаралық қабатты функциялар әдісі;

-Импульсті дифференциалдық теңдеулер теориясы;

Теориялық және практикалық құндылығы. Жоғары туындысында кіші параметрі бар дифференциалдық теңдеулер көптеген ғалымдардың зерттеу нысаны болып табылды. Өйткені, олардың гидродинамикада (Навье-Стокс теңдеуі), радиотехникада және басқа механика, физика, техника (Шредингер теңдеуі) есептерінде қолданбалы маңызы бар. Ал сингулярлы ауытқыған импульстік дифференциалдық теңдеулер кейбір табиғи құбылыстарды жақсы сипаттай алады. Олардың ішінде инженерлік жүйелердегі хаос пен бифуркацияны басқару, импульсивті туу эпидемиясының моделі және күрделі динамикалық жүйелерді модельдеу және басқару т.б. Сингулярлық ауытқыған импульстік дифференциалдық теңдеулер күрделі болғандықтан нақты шешім табу қиындық тудырады, сондықтан бұл салаға қызығушылық жоғары деңгейде.

Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негізгі нәтижелер. Диссертациялық жұмыста бұрын зерттелінбеген қойылымдағы есептер қарастырылып, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

-Сингулярлы ауытқыған сызықты импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

-Сингулярлы ауытқыған импульсті сызықты емес дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің асимптотикалық жіктелуі құрылды;

-Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық теңдеулердің асимптотикалық жуықтауының мүшелерін анықтайтын алгоритм құрылды;

-Импульсті функцияға қойылған шартқа байланысты бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық құбылыстары анықталды;

-Шешімнің асимптотикасының негіздемесі көрсетілді;

-Моделдеу арқылы сандық мысалдар келтірілді;

Аппробация. Диссертациялық жұмыстың нәтижелері «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-8 сәуір, 2021ж.), «Фараби әлемі» халықаралық ғылыми конференциясында (Алматы, Қазақстан, 6-7 сәуір, 2023ж.), «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясында (Ош қ., Қырғызстан, 26-27 қыркүйек 2024 ж.), «Уфимская осенняя математическая школа—2024» халықаралық ғылыми конференциясында (Уфа қ. Ресей, 2-5 қазан 2024 ж.), «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясында (Алматы қ., Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 жыл), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық

университеті механика-математика факультеті математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өтті.

Ғылыми тұжырымдардың, қорытындылар мен нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі. Зерттеу жұмысындағы алынған нәтижелер осыған дейін белгілі ғалымдар жасаған дәлелдемелермен, индекстелеген халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сонымен қатар конференция материалдары арқылы расталады.

Жарияланымдар. Диссертацияның нәтижелері бойынша 12 жұмыс жарияланды:

–*Web of Science және Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланымдар:*

1. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // Carpathian Journal of Mathematics. –2024,–40, no. 3, 581 – 598.

2. Asymptotic convergence of solutions for singularly perturbed linear impulsive systems with full singularity // Symmetry. 2025; 17(9):1389. Scopus: 93%, Web of Science: Q2.

3. A case of impulsive singularity // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 117, n. 1, apr. 2023. ISSN 2617-4871

4. Asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, [S.l.], v. 112, n. 4, dec. 2021. ISSN 2617-4871.

5. Asymptotic expansion of the solution for singular perturbed linear impulsive systems // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, –2024, – 122(2), 14–26.

6. Asymptotic solutions to initial value problems for singularly perturbed quasi-linear impulsive systems// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2025; 127(3): 13–28. Scopus: 18%, Web of Science: Q4.

–*Халықаралық ғылыми конференциялардың еңбектеріндегі жарияланымдар:*

1. Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық тендеуге арналған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық сипаты // «ФАРАБИ ӨЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2021 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2021. –12 б.).

2. Сингулярлы ауытқыған импульсті дифференциалдық тендеулер жүйесі // «ФАРАБИ ӨЛЕМІ» халықаралық ғылыми конференциясы, Алматы, 7-8 сәуір 2023 жыл: баяндамалар тезистері (Алматы –2023. –5 б.).

3. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы, Ош қ., Қырғызстан, 26-27 қыркүйек 2024 жыл: баяндамалар тезистері (Ош –2024. –17 б.).

4. Асимптотическое разложение решения задачи для сингулярно возмущенных линейных импульсных системы с сингулярными импульсами // «Уфимская осенняя математическая школа—2024» халықаралық конференциясы, Уфа қ., Ресей, 2-5 қазан 2024 жыл: баяндамалар тезистері

(Уфа –2024. –2-том, 7-8 б.).

5. Асимптотические решения дифференциальных уравнений с сингулярными импульсами // «Ғылым күніне орай математика және математикалық модельдеу институтының 80 жылдығына арналған дәстүрлі сәуір математикалық конференциясы, Алматы қ., Қазақстан, 1-4 сәуір 2025 жыл: баяндамалар тезистері. (Алматы–2025. 82 б.)

6. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses // «Математика, механика және ақпараттық технологиялар» X халықаралық ғылыми конференциясы, Қазақстан, Алматы, 24-26 қыркүйек, 2025.

Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелері бойынша 6 жұмыс жарияланды, оның ішінде: – Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша екінші (Q1) квартильге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентиі 81 болатын 1 мақала, – Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша бірінші (Q2) квартильге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентиі 93 болатын 1 мақала және (Q4) квартильге енгізілген процентиі 18 болатын ғылыми журналдардағы 4 мақала; – Халықаралық конференциялардың тезистер жинағында 6 жарияланым.

Диссертацияның құрылымы. Диссертациялық зерттеу жұмысы нормативтік сілтемелерден, кіріспеден, негізгі екі бөлімнен (әр бөлім бөлімшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Диссертацияның көлемі 81 бет.

Диссертацияның мазмұны. Ұсынылған диссертациялық жұмыстың кіріспесінде зерттеу тақырыбының өзектілігі мен ғылыми жаңалығы, зерттеу әдістері, теориялық және практикалық құндылығы, сонымен қатар диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берілген.

Бірінші бөлімде сингулярлы ауытқыған импульсті сызықты дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық жіктелуі қарастырылады. Шешімнің жуықтау мүшелерін табу алгоритмі анықталады. Кейін Бутузов-Василева теоремасының аналогы тұжырымдалып, шешімнің бар және жалғыз болатыны дәлелденеді.

Жұмыстың 1.1 ішкі бөлімінде сингулярлы ауытқыған сызықты коэффициенттері айнымалы импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылады. Импульсті функцияға байланысты бірқабатты сингулярлық құбылысы анықталады.

Жұмыстың 1.2 ішкі бөлімінде сингулярлы ауытқыған сызықты коэффициенттері айнымалы импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылады. Импульсті функцияға байланысты көпқабатты сингулярлық құбылысы анықталады.

Екінші бөлімде сингулярлы ауытқыған сызықты емес импульсті дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есеп қарастырылады. Импульсті функцияға байланысты бірқабатты сингулярлық және көпқабатты сингулярлық құбылыстар анықталады. Теориялық нәтижені растау үшін графикалық көрнекілікпен нақты мысалдар келтіріледі.

Қорытынды бөлімде диссертациялық жұмысты орындау барысында алынған қорытындылар мен зерттеудің негізгі нәтижелері келтірілген.